

数学科における教科の本質に迫る授業づくり

数学科 川村 真広

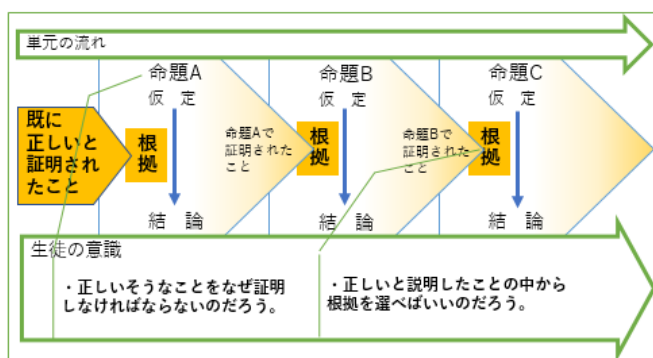
1 単元名

図形の調べ方 ～角と平行線，多角形の角～（2年）

2 本単元について

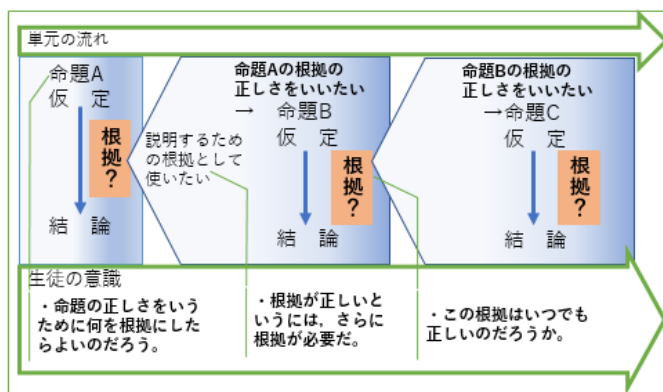
本単元は，図形の性質を題材に，根拠を基に，命題の正しさを論理的に考察し演繹的な推論の方法を学び始める単元である。中学校学習指導要領には，「図形に関する内容が数学的推論による考察とその過程の表現に適している」とある。さらに「図形概念や性質が個々にばらばらではなく，体系的に組み立てることができる」特に「生徒の発達段階からみても，演繹の必要性と意味及びその過程に興味・関心をもち，論理的に考察する力も高まっていく」とある。授業者は，図形に関する内容は問題解決の根拠が明確で，過程や結果を振り返って統合させたり，発展的に考察させたりすることで，図形概念や性質の関係を捉えやすい領域と考えている。しかし，平成30年度全国学力・学習状況調査の結果（概要）では，「対頂角は等しいことの証明について正しい記述を選ぶ設問」を例に「証明の必要性と意味の理解に引き続き課題がある。」としている。課題は次のように考える。

現行の教科書の単元構成では，一つの命題の正しさを導いた後，それを根拠に新しい命題の正しさを導いていく。教科書で扱われている証明の多くは，直観的に正しいような事柄を，すでに正しいと明らかになったことを根拠に説明する。【図1】生徒は，「直観的に正しいことをなぜ証明しなければならないのか」と説明することの必要性を感じていない。実際，生徒が証明の過程で，証明したいことと全くつながりのない図形の性質を持ち出して根拠とすることがある。説明する必要性を見いだせないまま証明をつくるので，正しいと明らかになったことから根拠を選んでいただけで，論理的に考察された説明になっていない。



【図1 現行の教科書の単元構成】

本実践では，命題が正しいことを説明するために，生徒が自ら根拠を見だし，その正しさを吟味する活動，すなわち，論証する活動を取り入れる。論証とは，命題の正しいことを自分が納得し，他人にその正しいことを説得することである。数学における論証では，正しいことの根拠を明らかにすることが必要である。さらに，その根拠が正しいというための根拠が存在する。【図2】本単元では，図形の性質を直観的にとらえるのが困難で，根拠に不確かさがある問題を提示する。生徒は「命題の正しさをいうために何を根拠にしたらよいのだろう」と考え，命題の中から説明に使いたいという必要性をもって，根拠となる図形の性質を見いだす。さらに，「見いだした根拠は正しいのか」と根



【図2 本実践の単元構成】

拠となる図形の性質が正しいことをいうために、別の図形の性質の正しさを説明したり、根拠となる図形の性質が「いつでも成り立つのか」と演繹的な吟味をはじめたりする。

こうして「根拠として使いたい」と図形の性質を見だし、その正しさを明らかにする図形の性質を見いだす活動がつながりをもって展開される。このように説明するための必要感から活動がつながることで、見いだされた図形の性質にもつながりを意識する。そして、生徒は「根拠を見いだしたい、見いだした根拠の正しさを明らかにしていきたい」と自ら数学を創りはじめる。本単元で学ぶ意義はここにある。

3 目標

- 対頂角や凹四角形の角の大きさについて、その性質の根拠となる図形の性質を見だし、根拠とした図形の性質が正しいことを吟味する活動を通して、以下ができるようになる。
 - ・ 図形の性質のつながりを見いだして、平行線と角の性質や多角形の角の性質を理解すること。
 - ・ 平行線と角の性質や多角形の角の性質をより簡潔・明瞭に説明すること。
 - ・ 平行線と角の性質や多角形の角の性質を演繹的に説明しようとする事。

4 評価規準

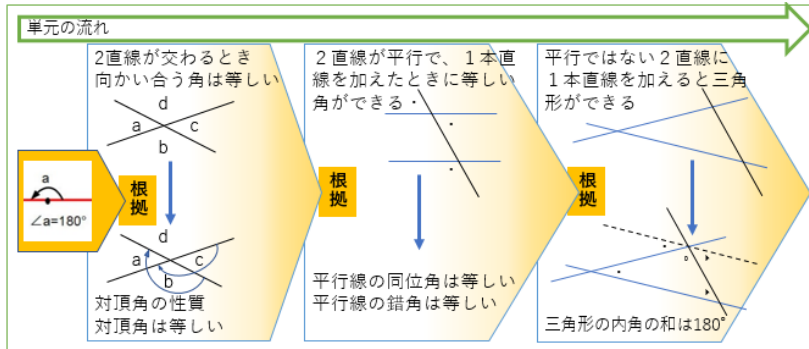
知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
<ul style="list-style-type: none"> ・ 角の大きさを求めたり、直線の位置関係を表したりするために、平角や平行線の性質を理解している。 ・ 多角形の内角、外角の和を求めるために、三角形の内角の和や三角形の外角の性質を理解している。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 根拠となる図形の性質をもとに、平行線と角の性質や多角形の角の関係をより簡潔・明瞭に説明している。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ 平行線の角の性質や多角形の内角や外角の和について、その性質が常に成り立つことを演繹的に説明しようとしている。

5 本単元における具体的な手だて

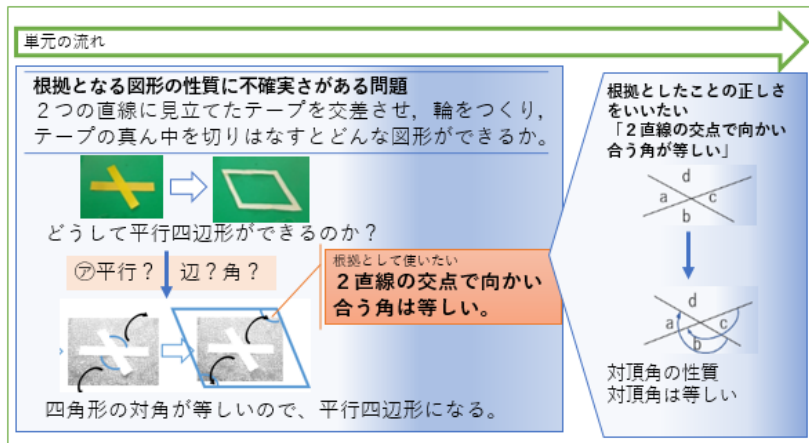
〈手だてア〉

根拠となる図形の性質に不確かさがある問題から、自ら根拠を見だし吟味する単元構成とする。

説明に必要な根拠を見だし、説明の根拠に用いた図形の性質を吟味する必要性を実感させるために行う。



【図3 現行の単元構成の具体】



【図4 本実践の単元構成の具体】

単元の導入に、説明の根拠となる図形の性質が、直観的にとらえることが困難な問題を提示する。(1) 直線に見立てたテープを (2) 交差させると、生徒は角ができることを知っている。テープの両端をとめて、(3) 輪をつくり、(4) テープの真ん中を切りはなすことで (5) できる図形を予想する。



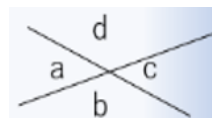
交差させる角度によって、さまざまな四角形ができる。生徒は、切りはなしてできた図形が「平行四辺形のような」ととらえるが、直観的に根拠をとらえることができないので「どうして平行四辺形ができるのか」と疑問をもつ。平行四辺形の性質を確認し、平行四辺形であることをいうためには根拠を示す必要があることを共有する。生徒は、観察や操作から「根拠を明らかにして説明したい」と目的意識をもって、テープで切りはなした直線を再現したり、もとの交差した2直線に立ち戻ったりして、根拠となりそうな辺の長さや角の大きさなどの図形の性質を見いだす。【図4】㊶

生徒は2直線の交点で向かい合う角が四角形の対角になっていることに気づく。さらに、「2直線の交点で向かい合う角は等しい」ことを根拠に、切りはなした図形は平行四辺形になると説明する。

〈手だてイ〉

根拠が正しいことを帰納的に確かめる場面を設定する。

根拠とした図形の性質がいつでも成り立つことを説明する必要性を生徒が実感するために行う。演繹的な説明を促すために、教師が「角aを測ると30°です。交点で向かい合う角cも30°になる。」など、具体的な角の大きさを挙げて説明する。生徒は、全ての場合を尽くせていないことに気づき、見いだした根拠の説明が不十分であると考え、根拠として見いだした図形の性質の正しさを「明らかにして説明したい」と目的意識が醸成されて以下の課題を見いだす。



〈本単元における課題〉

角の大きさの関係について、根拠を明らかにして説明するにはどうしたらよいのだろうか。

帰納的な説明の中で直線をなす角を用いて説明する見通しができた生徒は、演繹的な説明を始める。見通しをもてない生徒には、数の性質を説明した場面を想起させる。数の性質では、帰納的に確かめたことを、完全帰納で説明したり、一般化で説明したりした。生徒は、どちらも有効な説明であると実感している。図形の性質では完全帰納できないので、一般化して説明することのよさを実感する。

【数の性質の場面】

問題 「12, 23, 34...のように、1~9の自然数で小さい方から

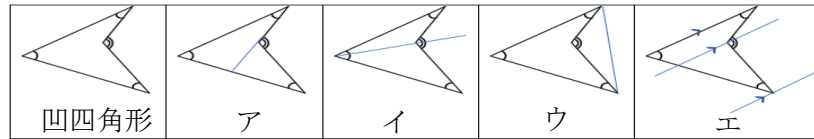
連続する2けたの数は、9をたすと、はじめの数と数字の順番が逆になる」

完全帰納	帰納的に確かめる	一般化
$12 + 9 = 21$ $23 + 9 = 32$ $34 + 9 = 43$ $45 + 9 = 54$ $56 + 9 = 65$ $67 + 9 = 76$ $78 + 9 = 87$ $89 + 9 = 98$	$12 + 9 = 21$ はじめの数 順番が逆	n を自然数とすると、はじめの数の十の位の数を n とすると、一の位の数は $n+1$ となる。はじめの数は $10n + n + 1$ と表すことができる。9をたすと $10n + n + 1 + 9 = 10n + 10 + n = 10(n+1) + n$ $n+1$ は自然数なので、 $10(n+1) + n$ は自然数である。よって、小さい方から連続する2けたの数は、9をたすと、はじめの数と数字の順番が逆になる

【図形の性質の場面】



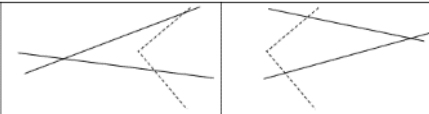
完全帰納	帰納的に確かめる	一般化
$\angle a = 5^\circ$ $\angle a = 20^\circ$ $\angle a = 60^\circ$ $\angle a = 90^\circ$	$\angle a = 40^\circ$ のとき $\angle b = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ $\angle c = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$	$\angle a = x^\circ$ のとき $\angle b = 180^\circ - x^\circ$ $\angle c = 180^\circ - (180^\circ - x^\circ)$

平行線と角の性質、折れ曲がった直線の性質を理解し活用できるようになった場面では、凹四角形の角の大きさを求める問題を提示する。多角形角の学習が終わってから取り扱われることが多い問題である。説明するための根拠となる図形の性質に多様さがあり、それらは帰納的に正しいと認めてきた図形の性質である。生徒は補助線を引いて三角形を見いだしたり、三角形の外角の性質や多角形の内角の和を見いだしたりして、それを根拠に説明をつくる。説明の根拠として見いだした「三角形の内角の和」「三角形の外角の性質」「四角形の内角の和」は、これまで帰納的に正しいと認めてきた。この場面で、生徒はいつでも成り立つことを説明する必要性を実感するとともに、それぞれの性質のつながりを理解する。



- ア 補助線により 1 つの三角形に着目して，内角の和，三角形の外角の性質を使った説明。
 イ 補助線により 2 つの三角形に着目して，内角の和，三角形の外角の性質を使った説明。
 ウ 凹四角形を包含する三角形の内角の和を使った説明。
 エ 平行線を加えて，錯角や同位角が等しいことを使った説明。

6 単元における構想 (全10時間 本時1/10)

目的意識	生徒の意識	学習活動・学習内容	教師の支援・指導	評価の方法
目的意識	<p>どうして平行四辺形ができるのだろう</p> <p>平行四辺形であることをいうために対頂角が等しいことを説明したい</p>	<p>① 2直線の交点にできる角と平行四辺形の対角の関係を調べる。</p> <ul style="list-style-type: none"> 直線がなす角が180度であることを確認する。 2直線の位置関係を分類する。 対頂角の性質を演繹的に説明する。 <p style="text-align: right;">【対頂角の性質】</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>〈本単元における課題〉</p> <p>角の大きさの関係について、根拠を明らかにして説明するにはどうしたらよいのだろうか。</p> </div> <p>② 平行線と同位角・錯角の特徴について調べる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 2直線の交点にできる角を切り開くとできる図形を推測させる。 手だてア 平行四辺形であることを説明するために、見いだした根拠を説明させる。 対頂角が等しいことの演繹的な説明をつくらせる。 手だてイ 	<p>【思判表】 ノート記述</p> <p>【知技】 ノート記述</p> <p>【主態】 プログレスカード</p>
	大きさの関係	<p>直線が3本になるといような図形が考えられるな</p> <p>折れ曲がった直線の角には、どんな性質があるのだろうか</p> <p>凹四角形の角にはどんな性質があるのだろうか</p> <p>三角形の内角の和を説明したい</p> <p>内角に対して、外角もあるのかな</p> <p>いろいろな多角形の角を求めるにはどうしたらよいか</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;">  </div> <p>(平行線と直線, 3本の直線からできる三角形, 3本が一点で交わるときの対頂角)</p> <ul style="list-style-type: none"> 平行線の定義を確認する。 平行線の同位角が等しい理由を考える。小学校ではどんな特徴があったか挙げる。 平行線の同位角の性質を用いて、平行線の錯角の性質を説明する。 <ul style="list-style-type: none"> 同位角が等しい直線は平行であることを用いて、錯角が等しい直線が平行であることを説明する。 <p>【平行線の性質, 平行線になるための条件】</p> <p>③ 2直線と折れ曲がった直線にできる角の性質を調べる。</p> <ul style="list-style-type: none"> 2直線と折れ曲がった直線の位置関係を分類する。 <div style="display: flex; justify-content: space-around;">  </div> <ul style="list-style-type: none"> 折れ曲がった直線がつくる角が平行線の内側と外側の場合を比較して説明する。 平行ではない2直線に変更して、折れ曲がった直線にできる角の性質を説明する。 <div style="display: flex; justify-content: space-around;">  </div> <ul style="list-style-type: none"> 三角形の内角の和が180°であることはいつでも成り立つか吟味する。 <p>④ 三角形の角について</p> <ul style="list-style-type: none"> 三角形の内角の和が180度であることを見いだした性質で説明する。 三角形の外角の性質を多様な方法で説明する。 三角形の内角の和が180度であることの変更に、多角形を分類する。 (角の多い多角形, 星形多角形, へこみのある多角形) <p>⑤ 102角形の角を調べる。</p> <ul style="list-style-type: none"> 平行線の性質や、三角形の内角の和をもとに多角形の和を求め、一般化する。 多角形の外角の和を求め、一般化する。 <p>⑥ 星形多角形の頂点の角の和を調べる。</p> <ul style="list-style-type: none"> 星形正多角形の頂点の角の和を求め、帰納的に一般化する。 	<ul style="list-style-type: none"> 直線が3本の場合、どのような図形ができるか挙げさせる。 3本の直線が一点で交わる時にも対頂角の性質が適用されることを確かめさせる。 平行線と直線が交わる時に等しい角を説明させる。 平行線の同位角が等しいことは、説明ができないことを反例から確かめさせる。(第5公準) 説明してきたことの逆が成り立つことを確認する。 折れ曲がった直線を含む場合、どのような図形ができるか挙げさせる。 平行線と折れ曲がった直線を含む図形で、共通することをまとめさせる。 凹四角形の角の性質を説明するために、見いだした根拠を説明させる。 手だてア 三角形の和が180°はいつでも成り立つかを問う。 手だてイ 三角形の外角の性質をこれまで見いだした図形の性質からまとめさせ、説明させる。 手だてイ 条件を変更した場合、どのような図形ができるか挙げさせる。 どんな多角形でも内角の和を求められるか説明をつくらせる。式の中に表れる数の意味を問う。 手だてイ 頂点の角の和を求める式の中に表れる数の意味を問う。 手だてイ

